# Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen
# Teilklausur Mathematik II (Lineare Algebra)

## 2. Klausur SS 99 Hamburg, 15.10.1999

## A Lineare Optimierung (10 Punkte)

Ein Reifenproduzent produziert Autoreifen ($A$) und Motorradreifen ($M$). Die Fertigung beider Typen ist weitgehend identisch. Sie geschieht auf zwei aneinandergrenzenden Maschinen ($M_1$ und $M_2$), die über eine Kapazität von 240 Zeiteinheiten (ZE) bzw. 200 ZE pro Monat verfügen. Jeder Reifen muß beide Maschinen durchlaufen. Dabei werden für die Monatage eines Reifens benötigt:

| | $A$ | $M$ |
|---|---|---|
| $M_1$ in ZE | 3 | 1 |
| $M_2$ in ZE | 5 | 1 |

Für einen Autoreifen wird ein Deckungsbeitrag von 15 Geldeinheiten (GE) und für einen Motorradreifen wird ein Deckungsbeitrag von 13 GE erzielt.

a) Ist es für den Hersteller möglich, bei den gegebenen Kapazitäten innerhalb eines Monats einen Auftrag über je 30 Auto- und Motorradreifen zu erfüllen?

b) Welche Stückzahlen der Reifentypen sind herzustellen, wenn der Deckungsbeitrag maximiert werden soll und wie lautet dieser maximale Deckungsbeitrag?

c) Welcher Deckungsbeitrag müßte für einen Autoreifen mindestens erzielt werden, damit der bzgl. des Deckungsbeitrages optimale Produktionsplan ausschließlich die Herstellung von Autoreifen verlangt?

## B Vektorräume und lineare Abhängigkeit (14 Punkte)

**1** Gegeben sind die Mengen

$$V = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \boldsymbol{x} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ;\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \boldsymbol{x} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ;\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Welche der Mengen sind Vektorräume? Begründung!

b) Geben Sie für die Mengen, die Vektorräume sind, jeweils eine Basis und die Dimension an.

c) Untersuchen Sie für die gefundenen Vektorräume, ob der Punkt $\boldsymbol{y}^T = (0 \quad -\sqrt{2} \quad \sqrt{2})$ Element des Vektorraumes ist und stellen Sie $\boldsymbol{y}$ gegebenenfalls als Linearkombination der Basisvektoren dar.

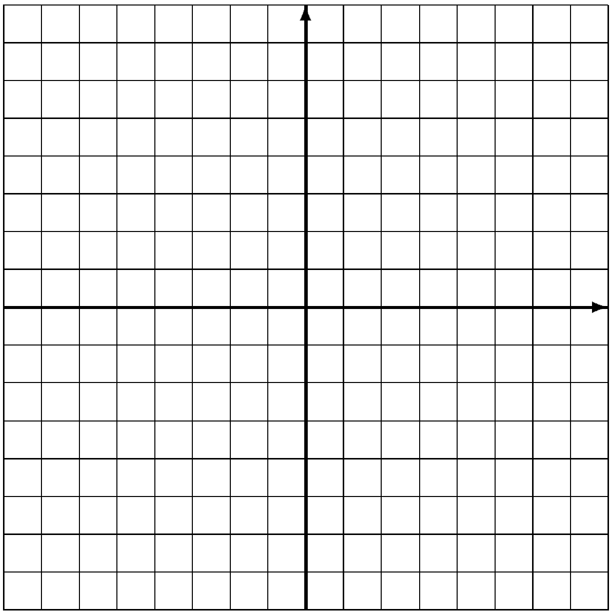
$\boxed{2}$ Gegeben sei die Menge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1(x_2 - 1) = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

a) Stellen Sie $M$ in einem Koordinatensystem graphisch dar.

b) Zeigen Sie, daß $M$ nicht abgeschlossen ist bzgl. der Addition.

c) Geben Sie (mit Hilfe der Graphik) eine Teilmenge $V \subset M$ an, welche abgeschlossen ist bzgl. der Addition.



## $\boxed{\text{C}}$ Matrizen

(19 Punkte)

$\boxed{1}$ Eine Matrix $\mathbf{Q}$ mit $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{0}$ heißt *nilpotent*. Geben Sie ein Beispiel für $x_1$, $x_2$ und $x_3$ an, so daß die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

nilpotent ist. Warum ist diese und auch jede andere nilpotente Matrix singulär? Begründung!

$\boxed{2}$ Die Matrix $\mathbf{A}$ sei invertierbar und symmetrisch. Die Matrix $\mathbf{X}$ sei invertierbar. Lösen Sie unter diesen Voraussetzungen und mit $\mathbf{E}$ als Einheitsmatrix die Matrizengleichung

$$\mathbf{X}(\mathbf{E} + \mathbf{A}\mathbf{X}) = [(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{X}^T]^T$$

nach $\mathbf{X}$ auf.

$\boxed{3}$ Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt die Matrix eine inverse Matrix $\mathbf{M}^{-1}$?

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\mathbf{M}^2$ regulär?

$\boxed{4}$ Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \alpha \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ c & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \alpha, c \in \mathbb{R}.$$

a) Für welche Parameter $\alpha$ und $c$ ist $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ mit $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ stets eindeutig lösbar?

b) Bestimmen Sie die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$.

c) Man bezeichnet eine Matrix $\mathbf{X}$ als orthogonal, falls $\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{E}$ gilt ($\mathbf{E}$=Einheitsmatrix). Für welche Werte $\alpha$ und $c$ ist $\mathbf{A}$ orthogonal.

## $\boxed{\text{D}}$ Matrizen und lineare Gleichungssysteme (17 Punkte)

$\boxed{1}$ $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sei ein lineares Gleichungssystem mit $m$ Gleichungen für $n$ Variablen. Durch Rangbetrachtung lassen sich Aussagen über die Existenz und die Eindeutigkeit von Lösungen machen. Geben Sie (durch Ankreuzen) an, welche Fälle a) - e) überhaupt auftreten können und nennen Sie für diese Fälle die richtigen Konsequenzen, also entweder 'eindeutig lösbar', 'mehrdeutig lösbar' oder 'unlösbar'.

| | | KANN NICHT AUFTRETEN | KANN AUFTRETEN eindeutig | mehrdeutig | unlösbar |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | $\text{Rang}(\mathbf{A}) = \text{Rang}(\mathbf{A}\|\boldsymbol{b}) - 1$ | | | | |
| b) | $\text{Rang}(\mathbf{A}) = n = m$ | | | | |
| c) | $\text{Rang}(\mathbf{A}) < \text{Rang}(\mathbf{A}\|\boldsymbol{b})$ | | | | |
| d) | $\text{Rang}(\mathbf{A}) = \text{Rang}(\mathbf{A}\|\boldsymbol{b}) < n$ | | | | |
| e) | $\text{Rang}(\mathbf{A}) = \text{Rang}(\mathbf{A}\|\boldsymbol{b}) > m$ | | | | |

$\boxed{2}$ Bestimmen Sie alle $(2,2)$-Matrizen $\mathbf{X}$ mit

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ Ein kleines exklusives Unternehmen der Bekleidungsindustrie stellt Unterhosen, Unterhemden sowie Hosen und Röcke aus reiner Baumwolle her. Für die gesamte Produktion stehen im Monat 1525 $m^2$ Baumwollstoff zur Verfügung. Um einen netten Gewinn zu sichern, sollen die Gesamtkosten nur 40 500 Geldeinheiten (GE) pro Monat betragen. Der Umsatz im Bereich 'Unterwäsche' ist auf 31 500 GE/Monat geplant, und bei der 'Oberbekleidung' sollen 52 000 GE/Monat umgesetzt werden.

| | Unterhose | Unterhemd | Hose | Rock |
|---|---|---|---|---|
| Stoffverbrauch ($m^2$/Stück) | 0.25 | 1 | 2 | 3 |
| Herstellkosten (GE/Stück) | 15 | 20 | 60 | 80 |
| Verkaufspreis (GE/Stück) | 25 | 40 | 110 | 200 |

a) Wie viele Unterhosen, Unterhemden, Hosen und Röcke müssen hergestellt werden, wenn alle obengenannten Bedingungen erfüllt werden sollen? Stellen Sie dazu ein Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses Problem mit dem Gauß'schen Verfahren.

b) Was ließe sich über die Lösbarkeit des Gleichungssystems aussagen, wenn in obiger Aufgabenstellung der Umsatz nicht in die Bereiche Unterwäsche und Oberbekleidung aufgeteilt, sondern ein Gesamtumsatz von 83 500 GE/Monat angegeben wäre?