Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen
Teilklausur Mathematik II (Lineare Algebra)

1. Klausur WS 99/00 Hamburg, 08.02.2000

$\boxed{1}$ 10 Punkte

Gegeben seien die beiden Mengen von Vektoren des $\mathbb{R}^2$:

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad U_2 = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| \, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Stellen Sie die beiden Mengen graphisch in einem Koordinatensystem dar.

b) Sind U_1 und U_2 Vektorräume?
Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie ggfs. deren Dimension und eine Basis an.

$\boxed{2}$ 5 Punkte

Gegeben sei die Menge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x_1 \geq x_2 \right\}$$

Überprüfen Sie die Abgeschlossenheit von M bzgl. der Addition und der skalaren Multiplikation mit einem Element aus $\mathbb{R}$ und entscheiden Sie damit, ob M ein Untervektoraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

$\boxed{3}$ 5 Punkte

In einer Klausur wurde die Matrizengleichung $2\mathbf{X} - \mathbf{AX} = (\mathbf{A} + 2\mathbf{E})^{-1}$ mit $\mathbf{A}, \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\mathbf{E}$=Einheitsmatrix wie folgt gelöst:

$$\begin{aligned}
& 2\mathbf{X} - \mathbf{AX} = (\mathbf{A} + 2\mathbf{E})^{-1} \\
\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \quad & (2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = (\mathbf{A} + 2\mathbf{E})^{-1} \\
\overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \quad & (2\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}(2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = (2\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})^{-1} \\
\overset{(3)}{\Longleftrightarrow} \quad & \mathbf{X} = [(2\mathbf{E} - \mathbf{A})(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})]^{-1} \\
\overset{(4)}{\Longleftrightarrow} \quad & \mathbf{X} = -[(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})]^{-1} \\
\overset{(5)}{\Longleftrightarrow} \quad & \mathbf{X} = -[\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{E}]^{-1}
\end{aligned}$$

Überprüfen Sie jeden der Rechenschritte (1)-(5), nennen Sie die Voraussetzungen für seine Durchführbarkeit und ggfs. die Fehler.

$\boxed{4}$ 6 Punkte

Seien $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ zwei reguläre $n \times n$-Matrizen. Falls eine reguläre Matrix $\mathbf{C}$ existiert mit

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{BC},$$

heißen die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ ähnlich.
Zeigen Sie unter der Voraussetzung, daß $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ ähnlich sind:

a) $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$,

b) $\mathbf{A}^2$ und $\mathbf{B}^2$ sind ebenfalls ähnlich,

c) $\mathbf{A}^{-1}$ und $\mathbf{B}^{-1}$ sind ebenfalls ähnlich.

$\boxed{5}$ 9 PUNKTE

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a \in \mathbb{R}.$$

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{X}$ regulär?

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{X}$ selbstinvers, d. h. $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{-1}$?

c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt $\det(\mathbf{X}) = \det(\mathbf{X}^{-1})$?

$\boxed{6}$ 10 PUNKTE

Eine Konfiserie verkauft Pralinen aus eigener Herstellung. Sie hat 1000 Nougat-Pralinen, 1500 Krokant-Kugeln und 1500 Marzipan-Taler auf Lager. Im Sortiment der Konfiserie sind 2 verschiedene Pralinenmischungen mit folgenden Zusammensetzungen:

- 'Geburtstagsgruß': 1 Nougatpraline, 5 Krokantkugeln, 8 Marzipantaler
- 'kleines Dankeschön': 3 Nougatpralinen, 1 Krokantkugel, 2 Marzipantaler

a) Zeigen Sie, daß es nicht möglich ist, durch die Herstellung verschiedener Mengen der beiden Pralinenmischungen alle im Lager vorhandenen Pralinen zu verbrauchen.

b) Um den gesamten Lagerbestand zu räumen wird eine weitere Pralinenmischung 'Zum Jubiläum' ins Sortiment aufgenommen. Sie soll 3 Nougatpralinen, 8 Krokantkugeln und höchstens 4 Marzipantaler enthalten. Bestimmen Sie die Anzahl der Marzipantaler, damit das Lager durch die Herstellung kompletter Pralinenenmischungen vollständig geräumt werden kann?

$\boxed{7}$ 15 PUNKTE

Ein Bauunternehmer beabsichtigt, zwei Typen von Eigenheimen zu bauen. Er rechnet mit einer Bauzeit von 2 Jahren und damit, daß sich sofort Käufer für die fertiggestellten Eigenheime finden. Folgende Daten wurden in Tausend DM ermittelt:

pro Eigenheim	Typ A	Typ B
Baukosten im 1.Jahr	200	200
Baukosten im 2.Jahr	120	200
Verkaufserlöse	330	420

Im 1. Jahr stehen DM 1 600 000, im 2. Jahr DM 1 200 000 zur Verfügung. Ziel ist die Ermittlung eines gewinnmaximalen Bauprogramms bestehend aus Typ A und/oder Typ B.

a) Formulieren Sie das dazugehörige lineare Optimierungsproblem.

b) Mit Hilfe des Simplexverfahrens bestimme man alle (Gewinn-)optimalen Lösungen von a) und gebe das Gewinnmaximum an.

c) Unter der Bedingung, daß für beide Bauabschnitte zusammen DM 2 800 000 zur Verfügung stehen, die beliebig auf beide Jahre aufgeteilt werden können und daß von jedem Typ mindestens 1 Eigenheim fertiggestellt werden soll, formuliere man ein gegenüber a) modifiziertes Optimierungsproblem und löse es graphisch. Wieviele Eigenheime vom Typ A und Typ B sollten fertiggestellt werden, um einen maximalen Gewinn zu erzielen?