Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen
Teilklausur Mathematik II (Lineare Algebra)

1. Klausur SS 2000 — Hamburg, 18.07.2000

Name, Vorname:

Adresse:

Geburtsdatum:

Matrikelnummer:

Studienfach, Fachsemester:

Versuche in Mathematik II (bitte ankreuzen): | 1. | 2. | 3. |

Unterschrift:

Bitte überprüfen Sie die Klausur zunächst auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 4 Seiten.

Aufgabe	max. Pkt.	err. Pkt.
1	10	
2	3	
3	7	
4	12	
5	12	
6	4	
7	6	
8	6	
gesamt	60	

abwesend	
von	bis

Bemerkungen:

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Bestimmen Sie für die folgenden Gleichungen die Matrix X. Dabei sind A, B,C und X $(n \times n)$ $-$Matrizen, A und B sind nicht singulär.

a) $A \cdot X \cdot B = C \cdot B$

b) $A \cdot (X + B) = B \cdot X$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 **(3 Punkte)**

Gegeben sei eine Matrix $A \in$*IR* ^{m,n}, d.h. A besitzt m Zeilen und n Spalten. Weiterhin sei bekannt, daß $m > n$ und $Rang\,(A) = n$.
Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch?

a. Die Spalten von A sind linear unabhängig.

b. Die Spalten von A sind eine Basis des *IR* ^{m}.

c. Die Zeilen von A sind ein Erzeugendensystem des *IR* ^{n}.

d. Das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ ist für alle $b \in$*IR* ^{m} lösbar.

e. Die inverse Matrix A^{-1} existiert.

Eine Begründung ist nicht notwendig!

Aufgabe 3 **(7 Punkte)**

Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a. Berechnen Sie A^{-1}.

b. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$.

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Eine Druckerei druckt Kataloge (x) und Bildbände (y). Hierzu werden Facharbeiter und Maschinenkapazität benötigt.
Die gesamte zur Verfügung stehende Maschinenkapazität beträgt 10000 Stunden, für 10 Kataloge wird 1Stunde und für 10 Bildbände werden 2,5 Stunden der Maschinenkapazität benötigt.
Die Kapazität an Facharbeiterstunden beträgt ebenfalls 10000 Stunden. Für die Herstellung von 10 Katalogen muss ein Facharbeiter 2 Stunden und für die Herstellung von 10 Bildbänden 1 Stunde arbeiten.
Weiterhin sei angenommen, daß maximal 40000 Kataloge abgesetzt werden können.
Das Unternehmen will seinen Gewinn maximieren,, der Gewinn lautet: $G\,(x, y) = 5x + 2y - 50000$

a. Berechnen Sie mit dem Simplex-Algorithmus die optimale Menge an Katalogen und

Bildbänden und den zugehörigen Gewinn.

b. Handelt es sich bei der Menge der zulässigen Lösungen um einen Vektorraum? (Begründung!)

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

Gegeben seien zwei stationäre Punkte $P_1 = (1.5, 1, 0.25)$ und $P_2 = (1, 1, 0)$ einer Funktion $y = f(x_1, x_2, x_3)$, d.h. es gilt:

$$\text{grad}\,(f(1.5, 1, 0.25)) = 0 \quad \text{und} \quad grad\,(f(1, 1, 0)) = 0$$

Für die Hesse-Matrix von f gelte:

$$\text{Hess}\,(f(1.5, 1, 0.25)) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{Hess}\,(f(1, 1, 0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie mit Hilfe der Definitheit der Hesse-Matrix, welcher der Punkte P_1 und P_2 gegebenenfalls ein lokales Maximum bzw. Minimum von f ist!

Hinweis:

$$\begin{aligned} (\text{grad}\,(f(x)) = 0 \wedge \text{Hess}\,(f(x)) \text{ positiv definit}) &\Rightarrow f \text{ hat in } x \text{ ein lokales Minimum} \\ (\text{grad}\,(f(x)) = 0 \wedge \text{Hess}\,(f(x)) \text{ negativ definit}) &\Rightarrow f \text{ hat in } x \text{ ein lokales Maximum} \\ (\text{grad}\,(f(x)) = 0 \wedge \text{Hess}\,(f(x)) \text{ indefinit}) &\Rightarrow f \text{ hat in } x \text{ kein lokales Extremum} \end{aligned}$$

Aufgabe 6 **(4 Punkte)**

Gegeben sei die Menge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \subset \text{IR}^3.$$

a. Welche Dimension besitzt der von M erzeugte Vektorraum $\text{span}\,(M)$?

b. Geben Sie eine Basis von $\text{span}\,(M)$ an, die keinen Vektor aus M enthält!

Aufgabe 7 **(6 Punkte)**

Entscheiden Sie (mit Begründung!), welche der Mengen ein reeler Vektorraum ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Basis und die Dimension.

a. $V = \left\{ (w, x, y, z)^T \,|x^2 - y^2 = 0; w, x, y, z \in \text{IR} \right\}$

b. $V = \left\{ (a, b, c)^T \,|a - 3 - c = a + b - 3; a, b, c \in \text{IR} \right\}$

Aufgabe 8 **(6 Punkte)**

Es seien vier Vektoren $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \text{IR}^3$ gegeben. Für diese Vektoren gelten die folgenden Zusammenhänge:

(i) $a_1 + a_2 = 3a_3$
(ii) $a_1 \neq \lambda a_3, \quad \lambda \in \text{IR}$
(iii) $\lambda a_1 + \mu a_3 \neq a_4, \quad \lambda, \mu \in \text{IR}$

Beantworten Sie die folgenden Fragen (mit kurzer Begründung):

a. Bilden die Vektoren a_1, a_2 und a_3 eine Basis des IR^3?

b. Bilden die Vektoren a_1, a_3 und a_4 eine Basis des IR^3?

c. Welche Dimension hat der durch die Vektoren a_1, a_2 und a_3 aufgespannte Vektorraum?

d. Sind die Vektoren a_1, a_2, a_3 und a_4 linear abhängig?