Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen
Teilklausur Mathematik II (Lineare Algebra(

2. Klausur SS 2000 Hamburg, 19.10.2000

Aufgabe 1 (6 Punkte(

Gegeben seien

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 | \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\} \quad \text{und} \quad M = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Mit $textspan\,(M)$ sei der von M erzeugte Vektorraum bezeichnet.

a) Begründen Sie, warum V ein Vektorraum ist!

b) Bestimmen Sie die Dimension von V!

c) Begründen Sie, warum gilt: $V = \text{span}\,(M)$

Aufgabe 2 (3 Punkte(

Gegeben sei eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Weiterhin sei bekannt, daß $\text{rg}\,(A) = n - 1$.
Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch?

a) Die Spalten von A sind ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^n$.

b) Die Zeilen von A sind linear abhängig.

c) Der Spaltenraum von A ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^{n-1}$.

d) Das homogene Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ besitzt einen 1-dimensionalen Vektorraum als Lösungsmenge.

e) Für die Determinante von A gilt: $\det\,(A) < 0$.

Eine Begründung ist **nicht** notwendig!

Aufgabe 3 (8 Punkte(

Für die Beladung eines Schiffes mit einer Ladefähigkeit von 80000 t und einer Laderaumkapazität von 100000 m^3 stehen die Güter x und y zur Verfügung. Das Gewicht und die benötigte Lade-raumkapazität der Güter ergibt sich auf folgender Tabelle:

	x	y
Gewicht	0,5 t	1,0 t
benötigtes Volumen	2,0 m^3	0,8 m^3

Von Gut x stehen maximal 40000 Einheiten und von Gut y maximal 100000 Einheiten zur Verfügung. Ziel ist die gewinnoptimale Beladung des Schiffes mit den Gütern x und y. Für den Gewinn $G(x, y)$ aus dem Transport gilt:

$$G\,(x, y) = 40x + 100y - 870000$$

a) Beschreiben Sie das Problem durch ein lineares Optimierungsmodell.

b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Simplex-Algorithmus die Aufteilung, die den maximalen Gewinn erbringt und geben Sie den zugehörigen Gewinn an.

Aufgabe 4 (4 Punkte(

Die Vektoren $a_1 = (1,1,1,1)^T$, $a_2 = (-3,-3,-3,-3)^T$, $a_3 = (-1,0,1,2)^T$ und $a_4 = (1,3,0,2)^T$ bilden ein Erzeugendensystem eines Unterraums U des $\mathbb{R}^4$.
Bestimmen Sie eine Teilmenge der gegebene Vektoren, die eine Basis von U ist. Welche Dimension hat U?

Aufgabe 5 (6 Punkte(

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 12 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= c \qquad , c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie über die Ränge der Matrizen den Wert c, für den das Gleichungssystem lösbar ist.

b) Berechnen Sie für den in a) erhaltenen Wert von c die Lösung(en) des linearen Gleichungssystem.

Aufgabe 6 (4 Punkte(

Überprüfen Sie, ob die folgende Menge abgeschlossen bezüglich der Addition und der Skalarmultiplikation ist.

$$V = \left\{ (x,y,z)^T \,|x \geq 0; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 7 (12 Punkte(

Ein Unternehmen fertigt die drei Produkte X, Y, Z mit der Tagesproduktion x, y, z. Es möchte sein Produktionsprogramm so gestalten, daß eine individuell für das Unternehmen ermittelte Zielfunktion $N(x,y,z)$, in der u.a. die Deckungbeiträge der Produkte und die Produktionsstruktur des Unternehmens berücksichtigt sind, maximiert wird.
In einem ersten Schritt wurden alle möglichen Mengenkombinationen der Produkte X, Y, Z ermittelt, an denen sich ein lokales Maximum von N beffnden kann. Hierzu wurden alle stationären Punkte der Zielfunktion $N(x,y,z)$ bestimmt, also die Punkte $P = (x,y,z)$ mit $\text{grad}N(P) = 0$. Als mögliche Punkte für lokale Extremwerte wurden drei Punkte ermittelt: $P_1 = (100, 200, 500)$, $P_2 = (50, 200, 60)$, $P_3 = (200, 200, 70)$.

Für die Hesse-Matrix von N gilt:

$$\text{Hess}N(x,y,z) = \begin{pmatrix} 400 - 2x - y & -0.05x - 0.05y & 0 \\ -0.05x - 0.05y & 10 - 0.05x - 0.1z & 0 \\ 0 & 0 & 300 - 2y - 1.2z \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie für die drei Punkte P_1, P_2, P_3 die Hesse-Matrix.

b) Untersuchen Sie mit Hilfe der Hesse-Matrix, ob für die Punkte P_1, P_2 und P_3 eine Aussage darüber gemacht werden kann, ob in den Punkten ein lokales Maximum oder lokales Minimum vorliegt. (Begründung!)

Hinweis:

$$\begin{aligned} &\text{grad}f(\vec{x}) = 0 \wedge \text{Hess}f(\vec{x}) \text{ positiv deffnit} &&\Rightarrow \quad f \text{ hat in } \vec{x} \text{ ein lokales Minimum} \\ &\text{grad}f(\vec{x}) = 0 \wedge \text{Hess}f(\vec{x}) \text{ negativ deffnit} &&\Rightarrow \quad f \text{ hat in } \vec{x} \text{ ein lokales Maximum} \end{aligned}$$

Aufgabe 8 (5 Punkte(

Gegeben sei die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

Welche Bedingungen müssen p und q erfüllen, damit $(E - A)^{-1}$ existiert? (mit $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)

Aufgabe 9 (12 Punkte(

Aus drei Rohstoffen werden drei Produkte hergestellt. Die zur Herstellung von je einer Einheit benötigten Rohstoffmengen sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt. In der letzten Spalte sind die zur Verfügung stehenden Rohstoffmengen angegeben.

	P_1	P_2	P_3	vorhandene Rohstoffen
R_1	1	4	6	2700
R_2	2	3	4	2000
R_3	4	1	0	c

a) Wie groß muß die Menge c von Rohstoff R_3 sein, damit bei der Herstellung der drei Produkte sämtliche vorhandenen Rohstoffe aufgebraucht werden können?

b) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis aus a) alle möglichen Herstellungsmengen für P_1, P_2 und P_3, mit denen sämtliche Rohstoffe aufgebraucht werden.
Beachten Sie dabei, daß nur positive Mengen der Produkte hergestellt werden können.

c) Wie lauten die Herstellungsmengen, falls vom Produkt P_1 genau 100 Einheiten hergestellt werden müssen und sämtliche Rohstoffe aufgebraucht werden sollen?