# Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen
# Teilklausur Mathematik II (Lineare Algebra(

## 1. Klausur    WS 2000/2001    Hamburg, 13.2.2001

## Aufgabe 1 (4 Punkte(

Lösen Sie die Matrizengleichung

$$(\mathbf{X}+\mathbf{A})(\mathbf{A}-\mathbf{X})+\mathbf{X}\mathbf{A}^T=(\mathbf{A}+\mathbf{X}^T)^T(\mathbf{A}-\mathbf{X}^T)^T+\mathbf{X}\mathbf{A}$$

formal nach $\mathbf{X}$ auf.

## Aufgabe 2 (6 Punkte(

a) Berechnen Sie $\mathbf{A}^2$ für $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & x \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

b) Ist es möglich, $x$ so zu bestimmen, daß $\mathbf{A}$ *idempotent* ist, d.h. daß $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$ ist?

c) Gilt für idempotente Matrizen auch $\mathbf{A}^{127}=A$?

## Aufgabe 3 (6 Punkte(

Sei $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

a) Prüfen Sie, ob $\lambda=1, \lambda=3, \lambda=5$ eine Lösung der *charakteristischen Gleichung* $p(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})=0$ ist. In diesem Fall heißt $\lambda$ *Eigenwert* von $\mathbf{A}$.

b) Bestimmen Sie für jeden gefundenen Eigenwert $\lambda$ von $\mathbf{A}$ den *Eigenraum* $\mathrm{E}(\mathbf{A},\lambda)$, d.h. die Lösungsmenge der Gleichung $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

## Aufgabe 4 (13 Punkte(

Sei $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ x & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie $\mathrm{ad}(\mathbf{A})$, $\det(\mathbf{A})$, $\mathbf{A}^{-1}$.

b) Für welche $x\in\mathbb{R}$ existiert $\mathbf{A}^{-1}$ nicht? Wie groß ist in diesen Fällen $\mathrm{Rang}(\mathbf{A})$ und die Dimension $\dim(\mathrm{N}(\mathbf{A}))$ des Nullraums $\mathrm{N}(\mathbf{A})$?

c) Bestimmen Sie $\mathrm{N}(\mathbf{A})$.

## Aufgabe 5 (6 Punkte(

Die drei Brüder Anton, Ernie und Bert haben jeweils € 50000 von ihren Vater geerbt. Sie haben ihr Erbe in Aktien der Firmen „*Infosoft*“, „*Winzigweich*“ und „*MIB*“ angelegt.

- Anton hat 150 Aktien von Infosoft, 20 Aktien von Winzigweich und 50 Aktien von MIB gekauft
- Ernie hat sein Erbe in 100 Aktien von Infosoft sowie 120 Aktien von Winzigweich investiert
- Bert hat 50 Aktien von Infosoft, 40 Aktien von Winzigweich und 100 Aktien von MIB gekauft

Wieviel hat je eine Aktie von Infosoft, Winzigweich und MIB gekostet?

## Aufgabe 6 (3 Punkte(

Welche der folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme (LGS) sind richtig:

a) Ein LGS mit $n$ Gleichungen in $n$ Unbestimmten ist immer lösbar.

b) Wenn ein LGS mit $n$ Gleichungen in $n$ Unbestimmten lösbar ist, dann ist es eindeutig lösbar.

c) Die Lösungen eines LGS erfüllen alle Gleichungen des Systems. Werte, die nur eine Gleichung nicht erfüllen, sind keine Lösung.

d) Ein LGS, das weniger Gleichungen hat als Unbekannte hat, kann eindeutig lösbar sein.

e) Ein LGS, das mehr Gleichungen als Unbestimmte hat, ist nicht lösbar.

f) Es gibt ein LGS, das genau zwei verschiedene Lösungen hat.

Eine Begründung ist **nicht** notwendig!

## Aufgabe 7 (5 Punkte(

Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen Lineare Räume (Vektorräume) sind.
Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

a) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

b) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

c) $U_5 = \left\{ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(2,2)} : \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ mit } \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} = 0 \right\}$

## Aufgabe 8 (5 Punkte(

Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Wie lautet die Definition der Linearen Unabhängigkeit für diese drei Matrizen?

b) Untersuchen Sie, ob diese Definition erfüllt ist.

## Aufgabe 9 (12 Punkte(

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\to max! \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 600 \\ 2x_1 + 2x_2 &\leq 320 \\ 3x_1 + 7x_2 &\leq 840 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Simplexalgorithmus eine $x_1$-$x_2$-Kombination, die die Zielfunktion maximiert. Berechnen Sie den Zielfunktionswert und geben Sie die Basisvariablen und Nichtbasisvariablen an, die zu dieser Lösung gehören.

b) Gibt es noch weitere Lösungen dieses Optimierungsproblems? Berechnen Sie ggf. eine weitere optimale Basislösung und geben Sie alle möglichen $x_1$-$x_2$-Kombinationen an, die das Optimierungsproblem lösen.