

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen

Teilklausur Mathematik II (Lineare Algebra)

2. Klausur WS 2000/2001

Hamburg, 29.03.2001

Aufgabe 1

(7 Punkte)

Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v}^T = (x \ y \ z)$.

- Berechnen Sie das Matrizenprodukt $\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}$ und $\mathbf{v}^T \mathbf{B} \mathbf{v}$.
(Dieses Matrizenprodukt heißt *quadratische Form*)
- Welche Beziehung besteht zwischen den Matrizenelementen a_{ii} und b_{ii} sowie für $i \neq j$ zwischen den Summen $a_{ij} + a_{ji}$ und $b_{ij} + b_{ji}$?
- Geben Sie eine weitere Matrix \mathbf{C} an, welche die gleiche quadratische Form erzeugt.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Eine Matrix \mathbf{A} heißt *Projektor*, wenn $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ und $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$. Man zeige, daß für eine (n, p) -Matrix \mathbf{X} mit $\text{Rang}(\mathbf{X}) = p$ die Matrix $\mathbf{A} := \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$ ein *Projektor* ist.

Aufgabe 3

(10 Punkte)

Sei $\mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

- Berechnen Sie $\det(\mathbf{A}(\lambda))$.
Für welche Werte von λ bilden die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}(\lambda)$ eine Basis des \mathbb{R}^4 ?
- Zeigen Sie, daß andernfalls der von den Spaltenvektoren von $\mathbf{A}(\lambda)$ erzeugte Vektorraum ein dreidimensionaler Unterraum des \mathbb{R}^4 ist.

Aufgabe 4

(8 Punkte)

Die Rohstoffe R_1, R_2, R_3 sind nur als Grundmischungen M_1, M_2, M_3, M_4 mit verschiedenen Anteilsverhältnissen $r_1 : r_2 : r_3$ lieferbar. Fassen wir diese Zahlen zu Vektoren $(r_1 \ r_2 \ r_3)^T$ zusammen, so sind die vier lieferbaren Grundmischungen durch

$$\mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{m}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{m}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{m}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gekennzeichnet.

- Wie müssen die Grundmischungen zusammengeführt bzw. die Vektoren $\mathbf{m}_i, i = 1, 2, 3, 4$ kombiniert werden, damit daraus eine Mischung mit dem Rohstoffverhältnis

$$r_1 : r_2 : r_3 = 5 : 7 : 5$$

entsteht? Geben Sie alle möglichen Kombinationen an.

Beachten Sie, daß nur positive Mengen von $M_i, i = 1, 2, 3, 4$ verwendet werden können.

- Läßt sich durch Kombination der $\mathbf{m}_i, i = 1, 2, 3, 4$ jedes Rohstoffverhältnis $r_1 : r_2 : r_3$ erzeugen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5

(2 Punkte)

Gegeben sei der Vektorraum

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösungsmenge gerade V ist.

Aufgabe 6

(7 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Mengen von Vektoren der \mathbb{R}^2 :

$$V_1 = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ a_2 \end{pmatrix}, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$V_2 = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

- Stellen Sie beide Mengen durch Wahl geeigneter Repräsentanten graphisch dar.
- Untersuchen und begründen Sie, ob und warum V_1 und V_2 Vektorräume sind. Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 7

(2 Punkte)

Ist die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen ein Vektorraum? Falls ja, bestimmen Sie die Dimension und geben sie eine Basis an!

Aufgabe 8

(12 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &\rightarrow \max! \\ x_1 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 8 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Führen Sie den ersten Schritt des Simplexverfahren durch und überprüfen Sie, ob die erhaltene Lösung optimal ist.
- Geben Sie für die folgenden Basisvariablen-Kombinationen die zugehörige Basislösung an, sofern sie existiert, und überprüfen Sie die Basislösung auf Zulässigkeit. Ist die Basislösung zulässig, berechnen Sie den Zielfunktionswert.
 - (x_1, x_2, u_2)
 - (x_1, u_1, u_2)
 - (x_1, u_1, u_3)

Aufgabe 9

(8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = 3x^2 + (y - 1)^2 + z^2 - 12x - 4y - 2z.$$

- Weisen Sie nach: f besitzt genau eine stationäre Stelle (x_0, y_0, z_0) , d.h. (x_0, y_0, z_0) mit:

$$\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) = (6x_0 - 12, 2(y_0 - 1) - 4, 2z_0 - 2) = (0, 0, 0).$$

- Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f und deren Hauptminoren.
- Entscheiden Sie mit Hilfe der Definitheit der Hesse-Matrix, ob $f(x_0, y_0, z_0)$ ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum ist. Berechnen Sie den Funktionswert an dieser Stelle.