Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen
Teilklausur Mathematik II (Lineare Algebra)

1. Klausur SS 99 — Hamburg, 20.07.1999

$\boxed{\text{A}}$ Lineare Gleichungssysteme (11 Punkte)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Für die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems gelte

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 17 \end{array}\right).$$

1. Zeigen Sie unter Nutzung des Ranges, daß das lineare Gleichungssystem lösbar ist.
2. Begründen Sie, wieso es keine eindeutige Lösung geben kann!

$\boxed{\mathbf{2}}$ Gegeben seien die beiden Vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Welche Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ lösen das Gleichungssystem

$$2\mathbf{x} + 4\mathbf{y} = \mathbf{v} \qquad \wedge \qquad 3\mathbf{x} - 2\mathbf{y} = \mathbf{w} \quad ?$$

$\boxed{\text{B}}$ Vektorräume und lineare Abhängigkeit (16 Punkte)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathbf{b} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Geben Sie einen dritten Vektor $\mathbf{c}$ an, so daß $\{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}$ und $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ jeweils linear unabhängig sind, die Menge $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ aber linear abhängig ist.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sei $\mathbf{a}^T = (1\ 2\ 3\ 4)$. Zeigen Sie, daß alle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ mit $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = 0$ einen Vektorraum V bilden. Bestimmen Sie eine Basis von V und seine Dimension.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Unter welcher Bedingung für $z \in \mathbb{R}$ sind die folgenden drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} z \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Welchen Rang hat die von $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ und $\mathbf{v_3}$ gebildete Matrix in diesen Fällen?

$\boxed{\text{C}}$ Matrizen (16 Punkte)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Gegeben sei die Matrizengleichung $\mathbf{A} - \mathbf{XB} + \mathbf{AX} = \mathbf{C}$ sowie die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Läßt sich die Matrizengleichung formal nach $\mathbf{X}$ auflösen? Begründung!
2. Bestimmen Sie $\mathbf{X}$ gegebenenfalls ohne formale Auflösung der obigen Gleichung.

$\boxed{2}$ Zeigen Sie für die Determinante einer (3,3)-Matrix

$$\mathbf{A} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} :$$

"Sind die beiden ersten Spaltenvektoren linear abhängig, d. h. es gilt $\mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{x}_2$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, so hat die Determinante den Wert 0."

$\boxed{3}$ Seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c+1 & 0 \\ 1 & c & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -c & 0 & 2 \\ 0 & -c & 0 \\ 1 & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Für welche $c \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.

b) $\det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A} + \mathbf{B})$

c) $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rang}(\mathbf{B})$

$\boxed{\text{D}}$ Lineare Optimierung (17 Punkte)

$\boxed{1}$ Es sei folgendes System von Ungleichungen gegeben:

$$x + y \geq 5, \quad x \leq 3, \quad y \leq 2, \quad 2x + y \leq 6$$

Die Zielfunktion $Z(x, y) = x + y$ soll maximiert werden.

1. Bestimmen Sie graphisch die Menge der zulässigen Lösungen.
2. Wie lautet die optimale Lösung, wenn man die letzte Bedingung $2x + y \leq 6$ fallen läßt?

$\boxed{2}$ Ein Transportflugzeug mit einer Ladefläche von $40\,t$ und einer Laderaumkapazität von $100\,m^3$ soll die Güter A und B laden.

	A	B
Gewicht in t	1	0.2
benötigtes Volumen in m^3	1	1

Von Gut A stehen maximal 30 Einheiten und von Gut B maximal 300 Einheiten zur Verfügung. Für den Gewinn aus dem Transportflug gilt:

$$G(x_A, x_B) = 480x_A + 80x_B - 7000.$$

Ermitteln Sie die Mengen x_A und x_B, so daß ein maximaler Gewinn erzielt wird und geben Sie den zugehörigen Gewinn an.