Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen
Teilklausur Mathematik I (Analysis)

1. Klausur   WS 99/00

$\boxed{1}$ 9 PUNKTE

Für $x \in \mathbb{R}$ gelte $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$.

a) Für welches x^* ist f nicht definiert und welchen Grenzwert von f erhält man für $x \to x^*$?

b) Wieviele Nullstellen besitzt die Funktion f im Bereich $[-2\pi, 2\pi]$?

c) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Funktion für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$.

$\boxed{2}$ 6 PUNKTE

Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_x^1 e^{-2z+1}\, dz$$

a) Bestimmen Sie die beiden Grenzwerte $\lim_{x\to 1} F(x)$ und $\lim_{x\to\infty} F(x)$.

b) Berechnen Sie $F'(0)$.

$\boxed{3}$ 9 PUNKTE

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - x$.

a) Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_{-4}^{4} f(x)\, dx.$$

b) Wie groß ist die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse die seitlich durch die Geraden $x = -4$ und $x = 4$ begrenzt wird?

$\boxed{4}$ 4 PUNKTE

Berechnen Sie $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3x^4 - 2} \right) dx.$

$\boxed{5}$ 9 PUNKTE

Für einen Produzenten von Luxusautomobilen ergeben sich folgende Preisabsatz- und Grenzkostenfunktion:

$$p(x) = -4x^2 + 500\,000 \qquad K'(x) = -200x + 500\,000.$$

Hierbei beträgt die maximal mögliche Produktionsmenge 500 Einheiten.
Die Produzentenrente PR (auch Deckungsbeitrag oder Brutto-Gewinn genannt) ist folgendermaßen definiert:

$$PR(z) = \int_0^z p(x) - K'(x)\, dx.$$

a) Bestimmen Sie die Produzentenrente $\mathrm{PR}(z)$, indem Sie das Integral berechnen.

b) Bestimmen Sie das lokale Maximum der Produzentenrente $\mathrm{PR}(z)$.

c) Handelt es sich bei der in b) gefundenen Lösung auch um ein globales Maximum? Begründung!

$\boxed{6}$ 6 PUNKTE

Es sei die folgende Funktion gegeben:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit } f(x, y) = -x^2 + xy - y^2.$$

Bestimmen Sie und klassifizieren Sie die lokalen Extrema der Funktion.

$\boxed{7}$ 4 PUNKTE

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(x) + ay(x) = b, \qquad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

Bestimmen Sie die Variablen a, b so, daß die Funktionen

$$y_1(x) \equiv 4 \quad \text{und} \quad y_2(x) = \exp[10 - 0.5x] + 4$$

gemeinsam Lösung der Differentialgleichung sind.

$\boxed{8}$ 6 PUNKTE

Lösen Sie die Differentialgleichung mit folgendem Anfangswertproblem:

$$y'(x) + y(x) - \cos(x) = 0 \qquad\qquad y(0) = 10.$$

$\boxed{9}$ 7 PUNKTE

Gegeben sei eine Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad Q(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha} \quad \text{mit } 0 < \alpha < 1$$

Berechnen Sie die stationäre Stelle der Lagrangefunktion unter der Nebenbedingung $x + y = K$.