Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen
Teilklausur Mathematik I (Analysis)

2. Klausur WS 99/00

$\boxed{1}$ 8 Punkte

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = -0.5x^2 + 15x - 62.5$$

a) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion g.

b) Welche Steigung s hat die durch die Punkte $(9, g(9))$ und $(25, g(25))$ führende Sekante?

c) Gemäß dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein $x^* \in]9, 25[$ mit $g'(x^*) = s$. Bestimmen Sie x^*.

$\boxed{2}$ 4 Punkte

Berechnen Sie folgendes Integral: $\displaystyle\int x^3 \cdot \ln(5x)\, dx$.

$\boxed{3}$ 7 Punkte

Der Zerfall eines radioaktiven Elements läßt sich durch folgende Differentialgleichung beschreiben:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\alpha N(t) \qquad \begin{aligned} N(t) &: \text{Teilchenzahl} \\ t &: \text{Zeit (in Jahren)} \\ \alpha &: \text{Zerfallskonstante} \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Zerfallsfunktion $N(t)$ für das radioaktive Element. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Teilchenzahl $N(0) = N_0$. Die Zerfallskonstante habe den Wert $\alpha = 0.000462$.

b) Berechnen Sie die Halbwertzeit τ des radioaktiven Elements, also die Zeit, nach der nurmehr die Hälfte des Anfangbestands an Teilchen vorhanden ist.

$\boxed{4}$ 4 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 5x - 6}{x + 6} & \text{für } x < -6 \\ e^{x+6} - 8 & \text{für } x \geq -6 \end{cases}$$

Ist f an der Stelle $x = -6$ stetig? Begründung!

$\boxed{5}$ 6 Punkte

Berechnen Sie mit der Regel von de l'Hospital

a) $\lim\limits_{x \to \infty} x^n \sin(1/x^n), \quad n \in \mathbb{N}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$

$\boxed{6}$ 5 Punkte

Zeigen Sie, daß für die kostenminimale Produktion eines Unternehmens folgende Bedingung gelten muß (Minimalkostenkombination):

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\dfrac{\partial f(r_1, r_2)}{\partial r_1}}{\dfrac{\partial f(r_1, r_2)}{\partial r_2}}$$

Hierbei ist f die Produktionsfunktion, r_1 und r_2 sind die Einsatzmengen der Produktionsfaktoren, und q_1 und q_2 sind die Faktorpreise.

Bestimmen Sie zur Lösung mittels Lagrangeverfahren die stationären Stellen der Kostenfunktion $K(r_1, r_2) = q_1 \cdot r_1 + q_2 \cdot r_2$ unter Berücksichtigung der durch ein konstantes Produktionsniveau gegebenen Nebenbedingung: $f(r_1, r_2) = \bar{Q}$.

$\boxed{7}$ 8 Punkte

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx$ und $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + |x|)^2}\,dx$, sofern diese Integrale existieren.

$\boxed{8}$ 6 Punkte

Gegeben sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \quad f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - x_2^2 + 5x_3^2\,.$$

Ferner gelten die beiden Nebenbedingungen

$$x_2 - x_3 = 0, \quad x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 10 = 0$$

a) Formulieren Sie die Abbildung in Abhängigkeit von einer Variablen.

b) Ermitteln und klassifizieren Sie die Extremwerte von f.

$\boxed{9}$ 12 Punkte

Gegeben sei die Absatzfunktion $Y(t)$ eines Produktes in Abhängigkeit von der Zeit $t \in \mathbb{R}_+$. Mit dem zeitabhängigen Werbeeinsatz $w(t)$ läßt sich die Absatzentwicklung durch folgende Differentialgleichung beschreiben:

$$Y'(t) = -0.1Y(t) + w(t)$$

Berechnen Sie jeweils für die Anfangsbedingung $Y(0) = 100$ die Absatzfunktion $Y(t)$ und die langfristige Absatzentwicklung $\lim_{t\to\infty} Y(t)$ unter der Annahme, daß

a) keine Werbung betrieben wird, d. h. $w(t) \equiv 0$.

b) ein konstanter Betrag für die Werbung eingesetzt wird, d. h. $w(t) \equiv 5$.

c) ein konstant wachsender Werbeeinsatz getätigt wird, d. h. $w(t) = 0.1t$