Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen
Teilklausur Mathematik I (Analysis(

2. Klausur SS 2000 Hamburg, 19.10.2000

Aufgabe 1 (4 Punkte(

Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral:

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{x+2}{x^3}\, dx$$

Aufgabe 2 (8 Punkte(

Bestimmen Sie das unbestimmte Integral von $\int (\sin x)^3\, dx$.

Hinweis: $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$

Aufgabe 3 (5 Punkte(

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) + 2y(t) = 2.$$

Ist $y(t) = \exp(-2t) + 1$ eine spezielle Lösung dieser Differentialgleichung?
Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (10 Punkte(

Es sei die Zielfunktion $f(x,y,z) = 2x + 3y + 5z$ gegeben. Weiterhin gelte die Nebenbedingung $g(x,y,z) = 3600$ mit $g(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2$.
Es sollen mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes die relativen Maxima der Zielfunktion f unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = 3600$ berechnet werden.

a) Wie lautet die Gleichung für die Lagrangefunktion?

b) Ermitteln Sie mit der Lagrange-Methode alle Stellen, an denen die Zielfunktion unter Einhaltung der Nebenbedingung ein lokales Maximum annehmen kann.
Berechnen Sie für diese Stellen die jeweiligen Funktionswerte.

c) Nehmen Sie an, daß die Variablen x, y, z die Produktionsmengen der drei Reifentypen X, Y, Z eines Reifenherstellers bezeichnen, die der Nebenbedingung $g(x,y,z) = 3600$ unterliegen.
Die Zielfunktion f sei die Gewinnfunktion des Reifenherstellers.
Können unter dieser Annahme die lokalen Extremwerte der Zielfunktion mit dem Lagrange-Ansatz aus a) bzw. b) ermittelt werden? (Begründung!)

d) Vergleichen Sie die Funktionswerte aus b) mit den Randwerten $f\left(30\sqrt{2}, 0, 0\right)$, $f(0, 60, 0)$, $f(0, 0, 60)$.

Aufgabe 5 (5 Punkte(

Bestimmen und klassiffzieren Sie alle Extrema der Funktion

$f : x \to x^{-2} e^{x}$

Aufgabe 6 (8 Punkte(

Ein Freiberufier hat die Möglichkeit, wöchentlich x Stunden für die Firma A und y Stunden für die Firma B arbeiten zu können. Das Einkommen läßt sich durch die Funktion $f(x, y) = \sqrt{2x} + \sqrt{3y}$ beschreiben.
Wie viele Stunden sollte er für die Firma A und wie viele Stunden für die Firma B arbeiten, um sein Einkommen zu maximieren, wenn ihm wöchentlich 30 Stunden zur Verfügung stehen?

Aufgabe 7 (10 Punkte(

Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot x^2 + 1 & \text{für } x < 1 \\ -x(x-3) - \frac{1}{2} & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, daß f bei $x_0 = 1$ stetig ist.

b) Ist für den so bestimmten Wert k die Funktion bei $x_0 = 1$ auch differenzierbar?

c) Fertigen Sie für den in a) bestimmten Wert k eine grobe Skizze des Graphen an (s. Seite **??**).

Aufgabe 8 (5 Punkte(

Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \dfrac{ax + by}{cx + dy}, D_f = \{(x, y) \,|cx + dy \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.
Untersuchen Sie, welche der Gleichungen von allen Paaren $(x, y) \in D_f$ erfüllt werden und welche nicht (Begründung!):

1. $grad\ f(x) = \dfrac{ad - bc}{(cx + dy)^2} \cdot (x, y)$
2. $grad\ f(x) = \dfrac{ad - bc}{(cx + dy)^2} \cdot (y, -x)$
3. $grad\ f(x) = \left(\dfrac{(ad - bc)\, y}{(cx + dy)^2}, \dfrac{(bc - ad)\, x}{(cx + dy)^2} \right)$

Aufgabe 9 (5 Punkte(

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

a) Geben Sie den Differenzenquotienten $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ an und fassen Sie das Ergebnis zusammen.

b) Ermitteln Sie hieraus durch Berechnung des Grenzwertes den Differentialquotienten von f an der Stelle x_0.