Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen
Teilklausur Mathematik I (Analysis)

2. Klausur WS 2000/2001 Hamburg, 29.03.2001

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, sofern diese existieren:

a) $\lim\limits_{x \downarrow -1} \dfrac{\sin(x+1)}{2x^2+4x+2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{\frac{1}{2}x^2 - 2x}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^{-2} \ln x}{x^{-1}(x+3)}$

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{(t-2)(t-1)}{t}\, dt\ ,\ x \in [1, \infty[\ .$$

Bestimmen und klassifizieren Sie alle lokalen Extremwerte und Wendepunkte von $F(x)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Gegeben ist eine Funktion f auf dem geschlossenen Intervall $[0,5]$:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \supset [0,5] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y = f(x) = 4\sqrt{x+2} + \sqrt{20-4x} \end{cases}$$

In welchen Punkten des Definitionsbereichs nimmt die Funktion jeweils ihr globales Maximum bzw. ihr globales Minimum ein?

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ und $g(x) = -f(x)$.

a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktion $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $x \in [1,3]$ in einem Diagramm.

b) Geben Sie die Fläche $A(q)$, die durch die Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $x \in [1,q]$, $q \geq 1$ eingeschlossen wird, als Funktion der rechten Intervallgrenze q an.

c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{q \to \infty} A(q)$.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x} \ln x\ dx$

b) $\displaystyle\int_0^4 f(x)\ dx \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} |x-2| & ,\ x < 2 \\ 4x-2 & ,\ x \geq 2 \end{cases}$

Aufgabe 6 (7 Punkte)

a) Drücken Sie die folgende Bedingung als Differentialgleichung aus und geben Sie eine allgemeine Lösung an. Geben Sie eine spezielle Lösung für $f(0) = \pi$ an.

Für die Punkte des Graphen der Funktion $f(x)$ gilt:
Die Steigung des Graphen der Funktion $f(x)$ in einem Punkt ist gleich der x-Koordinate des Punktes.

b) Lösen Sie in allgemeiner Form die Differentialgleichung

$$y' - x = \frac{y}{x}\,, \quad x > 0$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Produktionsfunktion

$$y : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad y(r_1, r_2) = r_1^{0.6} \cdot r_2^{0.7}$$

a) Bestimmen Sie das totale Differential dy der Funktion $y(r_1, r_2)$.

b) Für das totale Differential gilt entlang einer Isoquante: $dy = 0$.
Bestimmen Sie mittels dieser Gleichung den Quotienten $\frac{dr_2}{dr_1}$ in Abhängigkeit von r_1 und r_2.
(Der Quotient $\frac{dr_2}{dr_1}$ kann als Steigung der Isoquanten interpretiert werden.)

Aufgabe 8 (8 Punkte)

a) Bestimmen Sie den maximal zulässigen Definitionsbereich der Funktion f mit:

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 \cdot y) + \exp(x + z) - \frac{z}{y}\,.$$

b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

Aufgabe 9 (8 Punkte)

Ermitteln Sie die möglichen Stellen für ein lokales Extremum der Funktion f:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x, y, z) = 2x^2 + y + xz$$

unter Einhaltung der Nebenbedingungen

$$x + y + z = 1 \quad \text{und} \quad 2x - z = 2.$$