Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen
Teilklausur Mathematik I (Analysis)

1. Klausur SoSe 99

$\boxed{\text{A}}$ Grenzwerte und Differentialrechnung (12 Punkte)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Berechnen Sie folgende Grenzwerte, sofern diese existieren:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1} - x \right)$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \sin(x)}{x}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Für die Absatzmenge $X(t)$ in ME eines Produktes wird folgende Entwicklung für $t \geq 0$ prognostiziert:

$$X(t) = -5 \exp(-0.04t^2) + 6.$$

a) Das punktuelle Änderungsverhalten $X'(t)$ nimmt zunächst ständig zu, um ab einem bestimmten Zeitpunkt t_0 wieder zurückzugehen. Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_0 dieser Trendwende.

b) Untersuchen Sie, ob $X(t)$ für sehr große Werte von t einem Sättigungswert zustrebt und wenn ja, bestimmen Sie diesen.

$\boxed{\text{B}}$ Integration (18 Punkte)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Bestimmen Sie

$$\int_2^3 \frac{e^x}{1 - e^x} \, dx.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Gegeben sei die Integralfunktion $G: D_G \to \mathbb{R}$ mit

$$G(x) = \int_1^x \left(1 - \frac{1}{(1+t)^2} \right) dt \qquad \text{auf} \quad D_G =]1; \infty[\,.$$

1. Weisen Sie nach, daß G auf D_G kein Extremum besitzt.
2. Auf welchem maximalen Intervall $J \subseteq D_G$ ist G monoton und welche Monotonie liegt vor?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Bestimmen Sie

$$\int_0^4 \left(\frac{6}{3x+1} + |x - 1| \right) dx.$$

$\boxed{4}$ Gegeben sei die Preiselastizitätsfunktion der Nachfrage

$$\epsilon_{x,p} = \frac{dp(x)}{dx} \cdot \frac{x}{p(x)} = \frac{-(x/k)^2}{p(x)\sqrt{1-(x/k)^2}} \qquad \text{mit } k \in \mathbb{R}_+.$$

Berechnen Sie mittels Integration die Preis-Absatz-Funktion $p(x)$.

$\boxed{\text{C}}$ Differentialrechnung und Optimierung (18 Punkte)

$\boxed{1}$ Ein Unternehmen produziere ein Gut mit der Gesamtkostenfunktion

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 80x + 81.$$

Die Kapazitätsgrenze der Ausbringungsmenge betrage 20 ME. Das Gut kann zum festen Marktpreis von 80 GE/ME abgesetzt wereden.

1. Wie lauten die Erlösfunktion und die Gewinnfunktion?
2. Bei welcher Ausbringungsmenge wird der Gewinn maximal?
3. Berechnen Sie $G(2)$, $G(3)$, $G(4)$ und die obere Gewinnschwelle x^*, d. h. die maximale Ausbringungsmenge, für welche der Gewinn gleich 0 ist.
   (Hinweis: Stellen Sie $G(x)$ in der Form $G(x) = (x-3) \cdot G^*(x)$ dar!)

$\boxed{2}$ Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4\ln(x) + 0.5x^2 - 4x$ auf dem Intervall $D = [1; 6]$. Bestimmen und klassifizieren Sie alle lokalen und globalen Extremwerte von f auf D.

$\boxed{3}$ Die Kostenfunktion $K : D_K \to \mathbb{R}$ mit $D_K \subseteq \mathbb{R}_+$ sei auf der Definitionsmenge differenzierbar. Als Betriebsoptimum bezeichnet man denjenigen Output x_0, für den die Stückkosten

$$\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$$

minimal sind. Zeigen Sie:
Für das Betriebsoptimum auf D_K gilt: $\bar{K}(x_0) = K'(x_0)$, d. h. Stückkosten gleich Grenzkosten.
(Hinweis: Benutzen Sie die notwendige Bedingung für das Betriebsoptimum!)

$\boxed{\text{D}}$ Differentialrechnung und Differentialgleichungen (12 Punkte)

$\boxed{1}$ Gegeben sei die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$.

1. Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ von f.
2. Berechnen Sie den Gradienten von f.
3. Besitzt f auf D_f einen stationären Punkt?

$\boxed{2}$ Von welchem Typ ist die Differentialgleichung $y' + y = 2x + 5$? Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$!