Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler/innen
Teilklausur Mathematik I (Analysis)

2. Klausur SoSe 99

$\boxed{\text{A}}$ Differentialrechnung und Optimierung (17 Punkte)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Ein Unternehmen stellt zwei Taschenrechnermodelle A und B her, die es zu den Preisen von 60 DM und 80 DM verkauft. Bei der Produktion entstehen neben den gemeinsamen Fixkosten von 5500 DM variable Kosten in Höhe von $(x_A^2 - 80x_A)$ DM bzw. $(x_B^2 - 20x_B)$ DM bei der Herstellung von x_A Stück vom Modell A bzw. von x_B Stück des Modells B. Bestimmen Sie das Gewinnmaximum unter der Annahme, daß alle produzierten Geräte verkauft werden!

$\boxed{\mathbf{2}}$ Für die Triebwerke eines Großraumflugzeuges wurde der Treibstoffverbrauch $d(v)$ (in Liter/Minute) in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit gemessen. Bei konstanter Flughöhe und fester Reisegeschwindigkeit v (in 1000 km/h) gilt:

$$d(v) = 200 - 375v + 312.5v^2$$

a) Bestimmen Sie diejenige Geschwindigkeit, die den Treibstoffverbrauch pro Minute minimiert.

b) Bestimmen Sie den gesamten Treibstoffverbrauch (in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit) für eine Flugstrecke von 9000 km.

c) Bestimmen Sie diejenige Geschwindigkeit, die den Gesamtverbrauch für die gegebene Flugstrecke aus b) minimiert!

$\boxed{\mathbf{3}}$ Gegeben seien die beiden Funktionen f und g mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2x + 3$.

a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von f und g eingeschlossen wird.

$\boxed{\text{B}}$ Integralrechnung und Differentialgleichungen (14 Punkte)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Gegeben sei die Integralfunktion

$$G(k) = \int_0^\infty x^{k-2} e^{-x} dx \qquad k \in \mathbb{N},\ k > 1$$

a) Berechnen Sie $G(2)$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der partiellen Integration, daß für $k > 2$ gilt: $G(k) = (k-2) \cdot G(k-1)$.

$\boxed{\textbf{2}}$ Die Funktion $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Differentialgleichung

$$xy' + y = x^2 + 1.$$

Bestimmen Sie $y(x)$ unter Beachtung der Randbedingung $y(3) = 0$.

C Grenzwerte und Stetigkeit (15 Punkte)

$\boxed{\textbf{1}}$ Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, sofern sie existieren:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x)}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \ln(x+1)}{2x-1}$

$\boxed{\textbf{2}}$ Gegeben sei die Integralfunktion $S :]0, \infty[\to \mathbb{R}$:

$$S(a) := \int_0^\infty \frac{1}{(x+a)^2}\, dx.$$

a) Geben Sie $S(a)$ ohne Integralzeichen an.

b) Untersuchen Sie das Grenzverhalten von S, d. h. $\lim_{a\to 0} S(a)$ und $\lim_{a\to\infty} S(a)$.

$\boxed{\textbf{3}}$ Gegeben sei die Funktion $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob

a) f an der Stelle $x = 1$ stetig ist,

b) f an der Stelle $x = 1$ differenzierbar ist.

D Integration (14 Punkte)

$\boxed{\textbf{1}}$ Sie kennen die Grenzkostenfunktion eines Ein-Produkt-Unternehmens sowie die Gesamtkosten (in DM) bei einer Produktion von 10 Einheiten des Produktes:

$$K'(x) = 6x^2 - 2x + 20; \qquad K(10) = 6000$$

Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion $K(x)$.

$\boxed{\textbf{2}}$ Gegeben sei die Funktion

$$F(x) = \int_a^x e^{3t-3}\, dt \qquad a \in \mathbb{R}.$$

a) Geben sie $F(x)$ ohne Integralzeichen an.

b) Für welche a gilt $F(-1) = 0$?

c) Bestimmen Sie $F'(x)$ und zeigen Sie, daß $F(x)$ keine lokalen Extremwerte besitzt.

$\boxed{\textbf{3}}$ Berechnen Sie

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{2x} + e^{4x} \right) dx.$$